

作业六 (12月1日课堂上交)

1. 我们课上已经给出了 \mathbb{N} 、 \mathbb{Z} 和 \mathbb{Q} 的严格定义，并且课上也给出了 \mathbb{Z} 上的序关系。试给出 \mathbb{Q} 上的序关系 (\leq) 的定义。要求：

a) 你们的定义必须是良性的（要能自圆其说，不能自己的定义就是有问题的）。比如，由于 \mathbb{Q} 是作为等价类来定义的，必须检查你定义的小于等于关系和等价类 $[m, n]$ 中 m 以及 n 的选取是无关的。同时，为了说明你定义的小于等于是序关系，需要证明自反性（任意有理数 r 满足 $r \leq r$ ）、传递性（如果有理数 r, s, t 满足 $r \leq s$ 且 $s \leq t$ ，则 $r \leq t$ 。）和反对称性（如果有理数 r 和 s 满足 $r \leq s$ 且 $s \leq r$ ，则 $r = s$ 。）；

b) 这样的序关系和你们高中就知道的有理数上的小于等于关系一致；

c) 你们定义中出现的所有东西，都应该有严格定义出处的。比如，如果说有理数 $r \leq s$ 指的是 $r - s \leq 0$ ，就必须说明什么是两个有理数的差 $r - s$ （因为你们这里有理数的定义只能是课件中定义的等价类，而且我们课堂上只是定义了有理数的加法，没有定义减法），而且还要说明什么是有理数零，同时还要说明（基于每个有理数都是等价类的定义）什么是一个有理数小于等于零，等等。

注：你们已经学了很多定义了，自己尝试下给出定义，可能会从另外的角度更好理解为什么以前的定义是如此这般，而不是如此那般。

2. **[有理数上的距离]** 基于你们在题1中给出的有理数上 \leq 的定义，可以定义任意两个有理数 r 和 s 之间的距离如下：

对于任意两个有理数 r 和 s ，他们之间的距离（记为 $d(r, s)$ ，with d for distance）为：若 $r \leq s$ ，则 $d(r, s) = s - r$ ；若 $s \leq r$ ，则 $d(r, s) = r - s$ 。

基于如上定义，证明：

- i) 对于任意两个有理数 r 和 s ， $d(r, s) = 0$ 当且仅当 $r = s$
- ii) 对于任意两个有理数 r 和 s ，有 $d(r, s) = d(s, r)$
- iii) **[三角不等式]** 对于任意有理数 r, s, t ，有 $d(r, t) \leq d(r, s) + d(s, t)$